שדות אלקטרומגנטיים 141035

פרק 26 - תרגילים ברמת מבחן

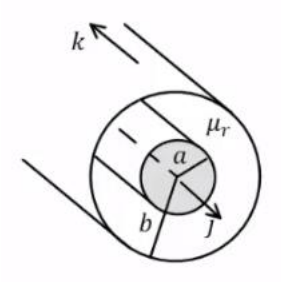
תוכן העניינים

תרגילים:

שאלות:

1) כבל קו-אקס עם חומר מגנטי

כבל קואקסיאלי בעל אורך אינסופי עשוי מגליל מלא פנימי בעל רדיוס a הנושא זרם I בצפיפות זרם נפחית אחידה. החלק החיצוני של הכבל הוא מעטפת גלילית דקה מאוד ברדיוס b הנושאת זרם I בכיוון הפוך ובצפיפות זרם משטחית אחידה. התחום שבין הגלילים מלא בחומר מגנטי עם מקדם פרמאביליות: $\mu_r = 1$.



חשבו את:

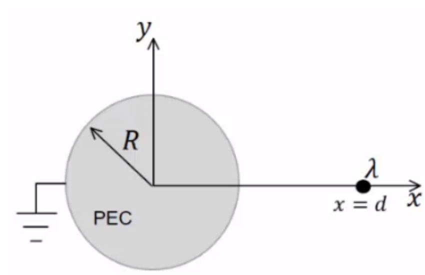
א. $\vec{H}$ בכל המרחב, כולל בתוך המוליך הפנימי. ציירו גרף של H כתלות ב- r והראו ש- H מקיים את תנאי השפה הדרושים.

ב. $\vec{B}$ בכל המרחב, כולל בתוך המוליך הפנימי. ציירו גרף של B כתלות ב- r והראו ש- B מקיים את תנאי השפה הדרושים.

ג. $\vec{M}$ בכל המרחב, כולל בתוך המוליך הפנימי. ציירו גרף של M כתלות ב- r והראו ש- $\vec{M}$ מקיים את תנאי השפה הדרושים.

2) תיל טעון מול גליל מוארק

נתון גליל אינסופי העשוי מוליך מושלם (PEC) בעל רדיוס R. נקבע את ראשית הצירים במרכז הגליל ואת ציר ה- z לאורך ציר הסימטריה של הגליל. מחוץ לגליל ובמרחק d על ציר ה- x החיובי ישנו תיל אינסופי עם צפיפות מטען λ (ראה איור).



הנח כי הגליל מוארק בנקודה: $(-R,0)=(x,y)$

וכן המקדמים הם: ε_0, μ_0 בכל המרחב.

א. מצא את מיקום צפיפות המטען המשוקפת $-\lambda$ הנחוצה לבעיה השקולה ואת תחום השקילות. קבע את הנקודה: $(x,y)=(0,R)$ על ציר ה- y כנקודת ייחוס לפוטנציאלים. יש להראות פיתוח מלא של התוצאה.

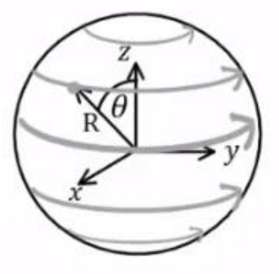
ב. מצא את הפוטנציאל והשדה החשמלי בכל המרחב.

ג. מצא את צפיפות המטען המושרה ואת סך כל המטען המושרה ליחידת אורך בחתך הגליל.

ד. כעת נתון כי: $d >> R$, מצא את צפיפות המטען המושרה על הגליל בקירוב סדר ראשון.

ה. בתנאי של סעיף ד', נתון כי קו המטענים נע במהירות איטית כך שמיקומו הינו: $(x,y)=(d(t),0)$. מצא את כל סוגי צפיפות המקורות המושרים בקירוב הקוויסטטי ואת התנאי על פרמטרי הבעיה לנכונות הקירוב הקווזיסטטי.

3) צפיפות זרם משטחית על כדור מגנטי



נתונה צפיפות זרם משטחית המפולגת על גבי פני כדור בעל רדיוס R שמרכזו בראשית הצירים: $\vec{k}(\varphi,\theta)=k_0\sin(2\theta)\hat{\varphi}$.

הנח שהמקדמים הם: ε_0,μ_0 בכל המרחב.

א. רשום ביטוי אינטגרלי לשדה המגנטי על ציר ה- z (אין צורך לפתור את האינטגרל אך יש לפשט ככל הניתן).

כעת נתון כי בנפח הכדור יש חומר מגנטי לינארי עם מקדם פרמהביליות יחסית μ_r ומקדם דיאלקטרי ε_0.

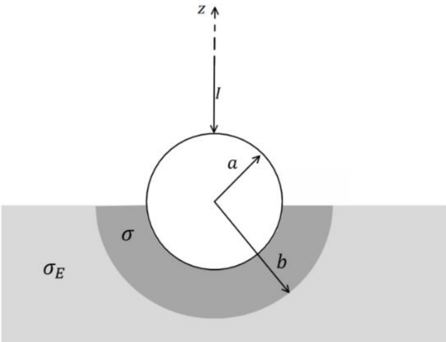
ב. הוכח כי קיים פוטנציאל סקלרי לשדה המגנטי ורשום את המשוואה הדיפרנציאלית של הפוטנציאל ואת כל תנאי השפה הנחוצים להגדרת הבעיה.

ג. חשב את הפוטנציאל המגנטי הסקלרי בכל המרחב.

כעת מוסיפים דיפול חשמלי בראשית הצירים בעל מומנט דיפול: $\vec{p}=p_0\hat{z}$.

ד. חשב את הוקטור פוינטינג עבור נקודה על ציר x בתוך הכדור. מה המשמעות הפיזיקלית של תשובתך?

4) הארקה דרך כדור שקוע בקרקע



הארקה מחוברת לקרקע באופן הבא.

חוט מוביל זרם I לתוך כדור מוליך מושלם ברדיוס a. הכדור שקוע בקרקע עד קו המשווה שלו. סמוך לשפת הכדור נוצרת שכבה שעוביה $b-a$ בעלת מוליכות σ.

המוליכות של האדמה היא σ_E.

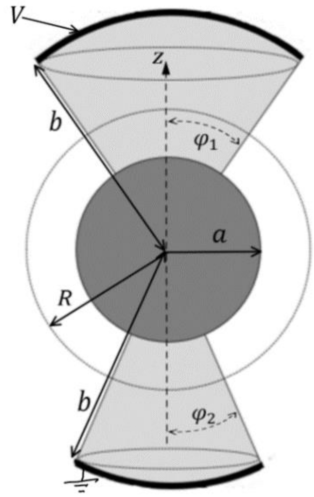
א. רשמו את תנאי השפה לפוטנציאל האלקטרוסטטי באדמה ובשכבה מסביב לכדור.

ב. חשבו את פונקציית הפוטנציאל באזורים הנ"ל.

ג. מצאו את ההתנגדות של האדמה כולל השכבה.

ד. מהי צפיפות הזרם המשטחית על שפת הכדור (מעל המשווה ומתחת)?

5) כדור ושתי גזרות



המבנה באיור עשוי מהחלקים הבאים :
גזרה כדורית עליונה
בתחום : $0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le \varphi \le \varphi_1$,
$a \le r \le b$ העשויה מחומר בעל מוליכות σ.
כדור מרכזי ברדיוס a עשוי מוליך מושלם
וגזרה כדורית תחתונה
בתחום : $0 \le \theta \le 2\pi$ $a \le r \le b$ $0 \le \varphi \le \varphi_2$,
בעלת מוליכות σ גם כן.
על פני הגזרה העליונה מונח משטח כדורי עשוי
מוליך מושלם ברדיוס $r = b$ המחובר לפוטנציאל V.
באותו האופן מונח משטח כדורי על פני הגזרה התחתונה
עשוי מוליך מושלם ומוארק.
המשטחים מתוארים בקו העבה באיור.

א. הניחו כי צפיפויות הזרם הנפחיות בגזרה העליונה והתחתונה הן : $\vec{J}_1$ ו-$\vec{J}_2$
ורשמו את חוק שימור המטען, בצורתו האינטגרלית, על מעטפת כדורית
ברדיוס R (מסומנת במקווקו באיור).

ב. הראו כי בתוך המוליכים הסופיים הפוטנציאל מקיים את משוואת
לאפלס ורשמו את תנאי השפה לפוטנציאל.

ג. מצאו את הפוטנציאל וחשבו את השדה החשמלי בתוך המבנה ואת
צפיפות הזרם המתאימה.

ד. השתמשו בחוק אמפר האינטגרלי וחשבו את $\vec{H}$ בגזרה העליונה.
הניחו כי השדה בכיוון $\hat{\theta}$ בלבד.

ה. הראו כי משפט פויינטינג מתקיים בגזרה העליונה.

6) שני לוחות ומקור זרם

נתון התקן העשוי משני לוחות מוליכים אידיאליים בגודל $a \times b$ ומרחק d ביניהם.
בצד אחד של הלוחות ישנו מקור זרם המספק זרם : $I(t) = I_0 \sin(\omega t)$.
בצד השני הלוחות מחוברים על יד דופן בעלת תכונות השראתיות כך שעל הדופן
מתקיים : $V(t) = L\dfrac{dk_y}{dt}$. נתון כי על פני המקור אין תיקונים לזרם מסדר גבוה.
כמו כן : $b >> a >> d$ וניתן להניח שהשדות מחוץ להתקן מתאפסים.

א. חשב את השדות מסדר אפס בתוך ההתקן.

ב. חשב את התיקונים מסדר ראשון לשדות.

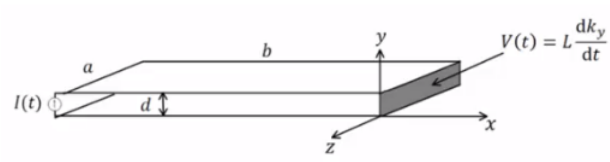
ג. מהי צפיפות המטען המשטחית על פני הלוח התחתון?

ד. חשב את התיקון מסדר שני לצפיפות הזרם המשטחית בלוח התחתון.

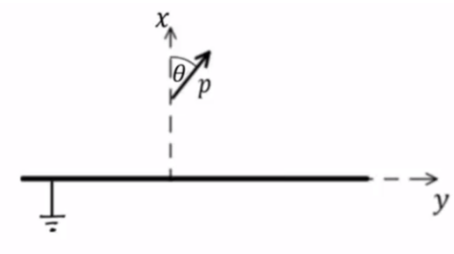
ה. השווה את $k^{(2)}$ ל- $k^{(0)}$ ותן תנאי לנכונות הקירוב הקוויזיסטטי (ניתן להניח: $\frac{L}{\mu_0 d} >> b$).

ו. חשב את הווקטור פויינטינג בהתקן עד סדר ראשון.

ז. הראה כי משפט פויינטינג בצורתו הדיפרנציאלית מתקיים בתוך ההתקן עד סדר ראשון.



7) דיפולים בזווית מעל מישור מוארק



דיפול חשמלי p מונח במרחק a מעל מישור אינסופי העשוי מוליך מושלם ומוארק. המישור נמצא על מישור yz והדיפול נמצא בזווית θ ביחס לציר ה- x.

א. מהו דיפול השיקוף?

ב. מהו השדה שיוצר דיפול השיקוף במיקום של הדיפול הנתון?

ג. מהו מומנט הכוח שפועל על הדיפול הנתון?

ד. חשבו את העבודה שצריך להשקיע כוח חיצוני על מנת לסובב את הדיפול מזווית $\theta = 0$ לזווית θ כלשהי. רמז: העבודה של מומנט כוח היא: $W = \int \tau d\theta$.

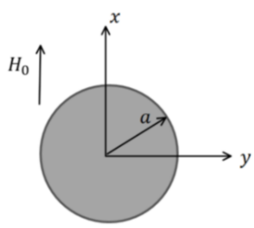
ה. מהם מצבי שיווי המשקל? מי מתוכם יציבים ומי לא יציבים?

ו. חזור על סעיפים א עד ה עבור דיפול מגנטי.

8) קיטוביות מגנטית של גליל מול מישורים מוארקים

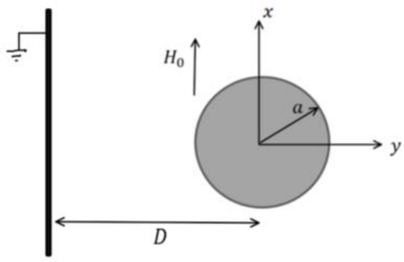
גליל אינסופי עשוי מוליך מושלם נמצא בשדה אחיד: $\vec{H} = H_0\hat{x}$.
ציר הגליל הוא לאורך ציר z באיור.

א. מצאו את השדה המגנטי בכל המרחב וחשבו ממנו את הקיטוביות המגנטית α_m של הגליל.



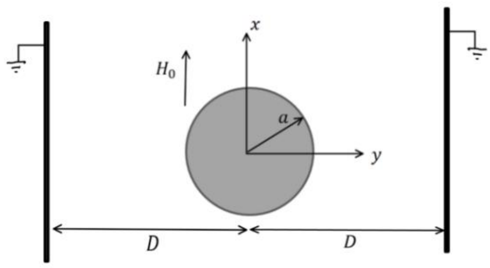
כעת מניחים ליד הגליל מישור אינסופי מוליך מושלם ומוארק כך שהמרחק בין המישור לגליל הוא D כאשר $D >> a$.

חשבו את הקיטוביות המגנטית המתוקנת של הגליל המוגדרת על ידי $\tilde{\alpha}_m = \frac{m}{H_0}$.



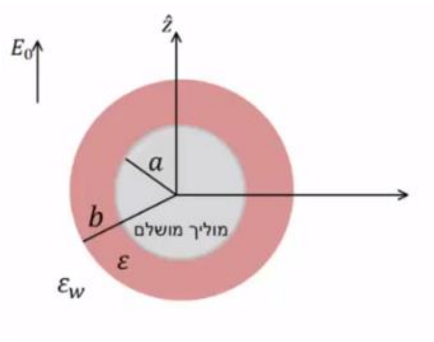
כעת מניחים מצידו השני של הגליל מישור נוסף זהה באותו המרחק.

ב. חשבו שוב את הקיטוביות המתוקנת במקרה זה.



9) שכבת הסוואה בתוך מים

המערכת הבאה צריכה להסוות מכשיר חשמלי בתוך מים. נניח כי המכשיר הוא כדור מוליך מושלם ניטרלי ברדיוס a. מקיפים את הכדור בשכבה בעובי $b-a$ העשויה מחומר דיאלקטרי בעל מקדם ε. המקדם הדיאלקטרי של מים הוא ε_W. בשביל לבדוק את יעילות ההסוואה שמים את המערכת בתוך שדה אחיד $E_0\hat{z}$.



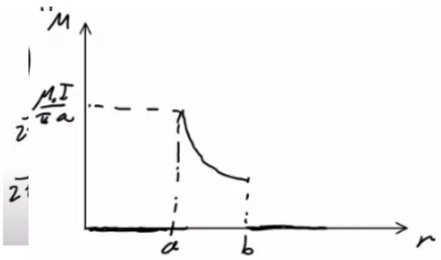
א. רשום את תנאי השפה לפונקציות הפוטנציאל במרחב.

ב. חשב את הפוטנציאל והשדה החשמלי בכל המרחב.

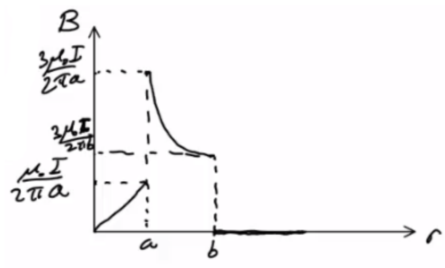
ג. מה צריך להיות רדיוס השכבה b כך שמחוץ לשכבה השדה החשמלי יישאר ללא שינוי $E_0\hat{z}$.

תשובות סופיות:

1) א. $\vec{H}=\begin{cases}\dfrac{Ir}{2\pi a^2}\hat{\theta} & r<a\\ \dfrac{I}{2\pi r}\hat{\theta} & a<r<b\\ 0 & b<r\end{cases}$, גרף:



ב. $\vec{B}=\begin{cases}\dfrac{\mu_0 Ir}{2\pi a^2}\hat{\theta} & a<r\\ \dfrac{3\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\theta} & a<r<b\\ 0 & b<r\end{cases}$, גרף:



ג. $\vec{M}=\begin{cases}0 & r<a\\ \dfrac{\mu_0 I}{\pi r}\hat{\theta} & a<r<b\\ 0 & b<r\end{cases}$, גרף:

2) א. $b_2=\dfrac{R^2}{d}$.

ב. $\varphi=\begin{cases}0 & r<R\\ k\lambda\ln\left(\dfrac{r^2+b^2-2rb\cos\theta}{r^2+d^2-2rd\cos\theta}\cdot\dfrac{R^2+d^2}{R^2+b^2}\right) & r>R\end{cases}$.

$$\vec{E}=-k\lambda\left(\frac{1(2r-2b\cos\theta)}{r^2+b^2-2rb\cos\theta}-\frac{1\cdot(2r-2rd\cos\theta)}{r^2+d^2-2rd\cos\theta}\right)\hat{r}-$$

$$\frac{k\lambda}{r}\left(\frac{1\cdot(2rb\sin\theta)}{r^2+b^2-2rb\cos\theta}-\frac{2rd\sin\theta}{r^2+d^2-2rd\cos}\right)\hat{\theta}$$

ג. $\eta=\dfrac{\lambda}{2\pi R}\dfrac{R^2-d^2}{R^2-2dR\cos+d^2}$.

ד. $k_\theta=-\dfrac{Ru\lambda}{\pi d^2}\sin\theta$.

3) א. $\vec{B}=\mu_0 R^3 k_0 \hat{z}\int_1^{-1}\frac{-dx\cdot x\left(1-x^2\right)}{z^2+R^2-2zRx}$. ב. $\theta_m(r=0)<\infty$, $\theta_m(r=\infty)<\infty$,

$+\frac{\partial\phi_{m2}}{2r}l_R=\mu_r\left(+\frac{\partial\phi_{m1}}{2r}l_R\right)$, $-\frac{1}{R}\frac{\partial\phi_{m2}}{2\theta}l_R+\frac{1}{R}\frac{\partial\phi_{m1}}{2\theta}l_R=k_0\sin 2\theta$, $0\le\varphi\le 2\pi$, $0\le\theta\le\pi$.

ג. $\phi_{m2}(r,\theta)=\frac{\mu_r R^4 k_0}{9+6\mu_r}r^{-3}\left(3\cos(2\theta)+1\right)$, $\phi_{m1}(r,\theta)=-\frac{k_0 r^2}{R(6+4\mu_r)}\left(3\cos(2\theta)+1\right)$.

ד. $\vec{H}=\frac{p_0 k_0\hat{y}}{\pi\varepsilon_0 R(6+4\mu_r)x^2}$.

4) א. ראה סרטון.

ב. $\phi_2=\frac{I}{2\pi\sigma_E r}$, $A_1=\frac{I}{2\pi b}\left(\frac{1}{\sigma_E}+\frac{1}{\sigma}\right)$, $\phi_1=A_1+\frac{I}{2\pi\sigma r}$.

ג. $R=\frac{1}{2\pi b}\left(\frac{1}{\sigma_E}-\frac{1}{\sigma}\right)+\frac{1}{2\pi a\sigma}$. ד. $K_\varphi=\frac{I}{2\pi a}\left(\frac{\cos\varphi+1}{\sin\varphi}\right)$.

5) א. $J_{1_r}(1-\cos\varphi_1)=-J_{2_r}(1-\cos\varphi_2)$. ב. ראה סרטון.

ג. $\phi_2=A_2+\frac{B_2}{r}$, $\phi_1=A_1+\frac{B_1}{r}$, $B_1=-\frac{abKV}{(b-a)(1-K)}$, $A_1=V-\frac{aKV}{(b-a)(1-K)}$,

$K=\frac{1-\cos\varphi_2}{1-\cos\varphi_1}$, $B_2=\frac{abV}{(b-a)(1-K)}$, $A_2=-\frac{aV}{(b-a)(1-K)}$.

ד. $\vec{H}=\frac{\sigma B_1}{r}\frac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi}\hat{\theta}$.

6) א. $\vec{H}^{(0)}=-k\hat{z}=-\frac{I}{a}\hat{z}$, $\vec{E}^{(0)}=0$. ב. $E_y^{(1)}=\mu_0\frac{\dot{I}}{a}\left(x+\frac{L}{\mu_0 d}\right)$, $\mathrm{H}^{(1)}=0$.

ג. $\eta^{(1)}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\dot{I}}{a}\left(x+\frac{L}{\mu_0 d}\right)$. ד. $K_x^{(2)}=-\frac{\varepsilon_0\mu_0\ddot{I}}{a}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{Lx}{\mu_0 d}+\frac{Lb}{\mu_0 d}-\frac{b^2}{2}\right)$.

ה. $\lambda>>\frac{L}{\mu_0 d}$. ו. $\vec{S}=\frac{\mu_0\dot{I}I}{Q^2}\left(x+\frac{L}{\mu_0 d}\right)(-\hat{x})$ ז. הוכחה.

7) א. $\vec{P}=P(\cos\theta\hat{x}-\sin\theta\hat{y})$. ב. $\vec{E}=\frac{kP(2\cos\theta\hat{x}+\sin\theta\hat{y})}{(2a)^3}$.

ג. $\vec{\tau}=\frac{-kP^2\sin 2\theta}{16a^3}\hat{z}$. ד. $w=\frac{kP^2}{32a^3}(\cos 2\theta-1)$.

ה. $\theta=0$: יציב , $\theta=\frac{\pi}{2}$: לא יציב , $\theta=\pi$: יציב , $\theta=\frac{3\pi}{2}$: לא יציב.

ו.א. $\vec{m}=m(\sin\theta\hat{y}-\cos\theta\hat{x})$. ו.ב. $\vec{B}=\frac{\mu_0 m}{4\pi}\frac{(-2\cos\theta\hat{x}-\sin\theta\hat{y})}{8a^3}$.

ו.ג. $\vec{\tau} = \dfrac{\mu_0 m^2 \sin 2\theta \hat{z}}{64\pi a^3}$.

ו.ד. $w = \dfrac{\mu_0 m^2}{128\pi a^3}\left(1-\cos 2\theta\right)$.

ו.ה. $\theta = 0$: לא יציב, $\theta = \dfrac{\pi}{2}$: יציב, $\theta = \pi$: לא יציב, $\theta = \dfrac{3\pi}{2}$: יציב.

8) א. $\alpha_m = -2\pi a^2$, $H_0\hat{x} + \dfrac{2\pi\left(H_0 a^2\right)\left(\cos\theta\hat{r} + \sin\theta\hat{\theta}\right)}{2\pi r^2}$.

ב. $\tilde{\alpha}_m = \dfrac{-2\pi a^2}{1-\dfrac{a^2}{4D^2}}$.

ג. $\tilde{\alpha}_m = \dfrac{-2\pi a^2}{1-\dfrac{\pi^2 a^2}{12D^2}}$.

9) א. $\theta_2\left(a\right) = C = 0$, $\theta_2\left(b\right) = \theta_3\left(b\right)$, $\varepsilon w \cdot \dfrac{\partial\theta_3}{\partial r} l_b = \varepsilon \dfrac{\partial\theta_2}{\partial r} l_b$, $\theta_3\left(r\to\infty\right) = -E_0 z = -Er\cos\varphi$.

ב. $B = \dfrac{E_0 b^3\left(\left(b^3+2a^3\right)\varepsilon_r - \left(b^3-a\right)\right)}{2\left(b^3-a^3\right)+\left(b^3+2a^3\right)\varepsilon_r}$, $\tilde{A} = \dfrac{-3E_0 b^3}{2\left(b^3-a^3\right)+\varepsilon_r\left(b^3+2a^3\right)}$, $\tilde{B} = -a^3\tilde{A}$, $\varepsilon_r = \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_w}$,

$E_0\dfrac{\left(\cos\varphi\hat{r} - \sin\varphi\hat{\varphi}\right)}{\hat{x}} + \dfrac{2B\cos\varphi\hat{r} + B\sin\varphi\hat{\varphi}}{r^3}$, $\vec{E}_2 = -\vec{D}\phi_2 = -\tilde{A}\hat{x} + \dfrac{2\tilde{B}\cos\varphi\hat{r} + \tilde{B}\sin\varphi\hat{\varphi}}{r^3}$.

ג. $b = a\left(\dfrac{1+2\varepsilon_r}{1-\varepsilon_r}\right)^{\frac{1}{3}}$.